Parte 3. Tema 9. Introducción al Álgebra

ÍNDICE

ATENCIÓN: los productos notables los desarrollaremos como un producto normal de polinomios. No obstante se puede aprender la fórmula.

INTRODUCCIÓN

Dos matemáticos se encuentran en la base del desarrollo del álgebra, Diofanto de Alejandría y **Mohammed Ibn Musa Al-Khwarizmi.**

Del primero se conoce que debió vivir sobre el siglo III, conocido por su Aritmética, un trabajo sobre la solución de ecuaciones algebraicas y sobre la teoría de números.

Su epitafio redactado en forma de problema y conservado en la antología griega rezaba así:

"Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad."

El mundo árabe medieval, conoció la Aritmética poco después de que el célebre AlJwarizmi redactara, hacia el año 830, su Kitab al-Mujtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala.

Mohammed Ibn Musa Al-Khwarizmi, (780-850) es considerado el padre del Algebrá. Llamado a Bagdad por el califa abasida Al Mamun, continuador de la Academia de Ciencias creada por su padre, llamada la Casa de la Sabiduría, en ella se tradujeron al árabe obras científicas y filosóficas griegas e hindúes. En este ambiente científico y multicultural se educó y trabajó Al-Khwarizmi. Todo este florecimiento traería importantes consecuencias en el desarrollo de la ciencia en Europa, principalmente a través de España, donde muchas obras serán traducidas al latín en la escuela de traductores de Toledo.

Al-Khwarizmi fue un recopilador del conocimiento de los griegos e hindúes, principalmente de matemáticas, pero también de astronomía (incluyendo el calendario judío), astrología, geografía e historia. Su trabajo más conocido y usado fueron sus Tablas Astronómicas, basadas en conocimientos de los hindúes. Incluyen algoritmos para calcular fechas y las primeras tablas conocidas de las funciones trigonométricas seno y cotangente.

De su aritmética, posiblemente denominada originalmente "Kitab al-Jam'a wal-Tafreeq bil Hisab al-Hindi", sólo conservamos la versión latina, Algoritmi de Numero Indorum, del siglo XII. En esta obra describe con detalle el sistema hindú de numeración posicional en base 10 y la manera de hacer cálculos con él. Fue esencial para la introducción de este sistema de numeración en el mundo árabe y posteriormente en Europa. El que nos haya llegado a través de los árabes hace que le llamemos habitualmente sistema de numeración árabe, cuando deberíamos llamarlo indo-arábigo.

Su tratado de álgebra es una introducción compacta al cálculo, usando reglas para completar y reducir ecuaciones. Quizás éste es el libro árabe más antiguo conocido y parte de su título "Kitab al-jabr wa'l-muqabala" da origen a la palabra álgebra. Esta obra representa para el Álgebra lo mismo que Los Elementos de Euclides para la Geometría.

El trabajo de Al'Khwarizmi permitió preservar y difundir el conocimiento de los griegos (con la notable excepción del trabajo de Diofanto) e hindúes, pilares de nuestra civilización.

Caso práctico

Al final del tema deberás ser capaz de contestar a la siguiente pregunta:

¿Cuánto tiempo vivió Diofanto según la información dada por su epitafio?

1) EXPRESIÓN ALGEBRAICA

*Cuando hacemos **operaciones entre números y letras**, decimos que se trata de expresiones* **algebraicas**.

El lenguaje algebraico sirve para traducir a simbología matemática, enunciados con operaciones entre cantidades que no conocemos.

*Las cantidades desconocidas se les llaman **incógnitas o variables**.*

Ejemplos de expresiones algebraicas serían:

- El cuadrado de la suma de dos números. $(x+y)^2$
- Si un litro de gasolina cuesta 1,05 € ¿Cuánto costarán **x** litros? C=1,05.**x**

Luego una incógnita o variable no es más que **un número desconocido** en el momento de realizar la operación aritmética en la que participa.

Ejercicio 1

Expresa las siguientes oraciones del lenguaje común al lenguaje algebraico.

Utiliza alguna de las siguientes expresiones:

x, x +1, x +2	x.(x –1) = 30	y2	x3 + 3x2	f-g	(x+1)/x	(2x/3)-5=12
x+7	x2 + 7	x	2x+5	x/2	1500-x	[(3x/5)+(x+1)/2]=3

Lenguaje Semántico	Lenguaje Algebraico
Un número cualquiera	
Un número cualquiera aumentado en siete.	
La diferencia de dos números cualesquiera.	
El doble de un número excedido en cinco.	
La división de un número entero entre su precedente.	
La mitad de un número.	
El cuadrado de un número.	
Las dos terceras partes de un número disminuido en cinco es igual a 12.	
Tres números naturales consecutivos.	
El cuadrado de un número aumentado en siete.	
Las tres quintas partes de un número más la mitad de su consecutivo equivalen a 3.	

El producto de un número positivo con su antecesor equivale a 30.	
El cubo de un número más el triple del cuadrado de dicho número.	
Lo que excede 1500 del valor de X	

1.2) VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

El valor numérico de una expresión algebraica es el resultado que se **obtiene** al sustituir las letras (variables) por números y efectuar las operaciones indicadas.

Veamos un ejemplo:

La expresión v.*t* sirve para calcular el espacio recorrido por un móvil en función de su velocidad y del tiempo que este está en movimiento (llamamos *v* a la velocidad y *t* al tiempo).

1) Si la velocidad es 60 km/h y está 2 h en movimiento, ¿cuántos km recorrerá?
2) Si ahora la velocidad fuese 75 km/h y el tiempo 4 horas y media (4,5 h), ¿cuál sería el espacio recorrido?

Valoración caso 1.- espacio recorrido= v.t = 60 km/h . 2 h =120 km

Valoración caso 2.- espacio recorrido= v.t =75 km/h .4,5 h=337,5 km

Ejercicio 2

Determina el valor numérico de la expresión: $x^4.y^2.z^3$; siendo x = 4, y = 3, z =1/2.

Ejercicio 3

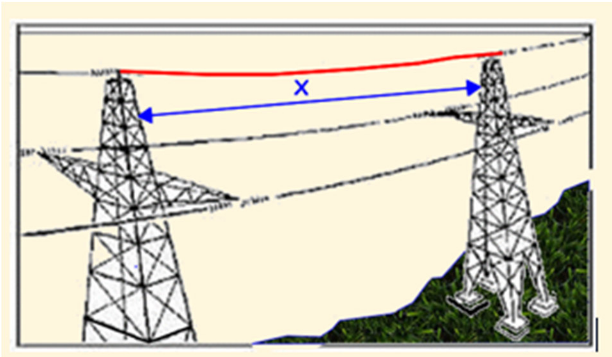
Cuál es el valor numérico de la expresión algebraica: $\frac{5x2}{3}-\frac{2.x.y}{5}+\frac{y}{3x}=$

Siendo el valor de las variables: x=2; y=1/4

2) MONOMIOS

Una expresión algebraica en la que **sólo** aparece la operación de multiplicar es un **monomio**.

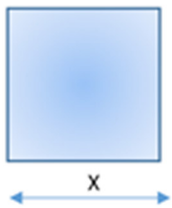
Podríamos preguntarnos cuál es la distancia que separa las torres eléctricas de la imagen.



La respuesta la encontraríamos en el siguiente monomio:

Distancia = X

Tengamos ahora en consideración el cuadrado de esta otra figura donde sabemos que su lado tiene una longitud de X unidades.

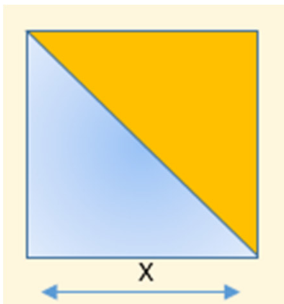


Si quisiéramos saber cuál es su área.

La respuesta la encontraríamos en el siguiente monomio:

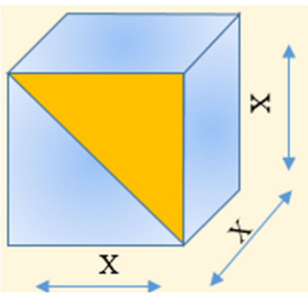
Área $_{\text{cuadrado}}$ = Lado * Lado = X.X= X^2

Si trazamos en el cuadrado su diagonal se nos habrán formado dos triángulos, el área de cada uno de ellos será por tanto la mitad del área del cuadrado.



$$\text{Área del Triángulo} = \frac{1}{2} \cdot x^2$$

Y si construyésemos un cubo con esos cuadrados, el volumen del mismo vendría determinado por el siguiente monomio:



$$Volumen_{cubo} = Bas.Altura = x.x.x = x^3$$

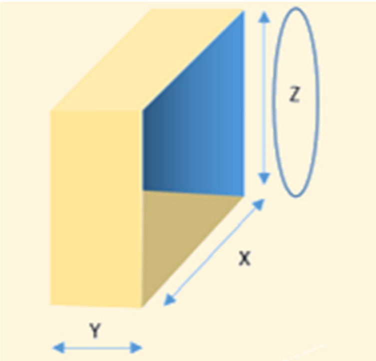
Así pues, un monomio sirve para expresar diferentes magnitudes como, distancias, superficies, volúmenes. Tendremos que estudiar qué es lo que les hace característicos, pero antes veamos otros monomios donde aparecen dos variables.

Supongamos ahora que tenemos un rectángulo que tiene **Y** unidades de ancho y **X** unidades de alto.

El área de dicho rectángulo sería el monomio:

Área rectángulo = Base. Altura= Y. X

En el siguiente paralelepípedo de dimensiones respectivas X, Y y Z, que como se aprecia en la figura representan las dimensiones de su ancho, largo y alto.



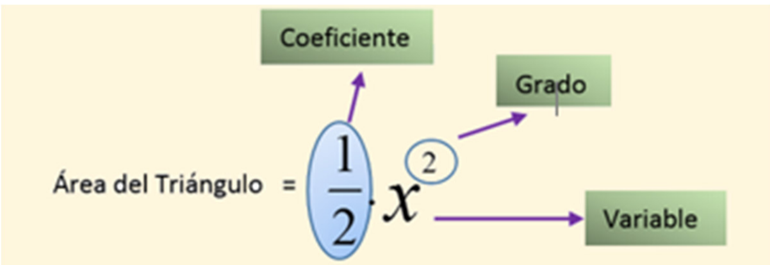
El volumen de dicho cuerpo lo podríamos calcular con el siguiente monomio:

Volumen = Base . Altura= Largo. Ancho. Alto = X.Y.Z

En los monomios denominamos a las partes que los componen del siguiente modo:

- Se llama **grado** de un monomio, al exponente al que está elevada su variable.
- Si el monomio estuviese formado por **dos o más variables**, el grado de dicho monomio sería la suma de los exponentes de las variables.
- Se llama **coeficiente** de un monomio, al número real que multiplica a la variable o las variables, en el supuesto que hubiese más de una.

  Cuando el coeficiente tiene como valor **uno**, no se suele poner.
- Se llaman **variables** a los valores numéricos no conocidos.
- Se llama **valor numérico** de un monomio, al número que obtenemos al sustituir la variable por números, realizando las operaciones indicadas



Cuando dos o más monomios tienen el mismo grado y están formados por las mismas variables, se dice que son monomios **semejantes** y, representan magnitudes físicas equivalentes. En los ejemplos vistos representaban una longitud, una superficie y un volumen.

Si los monomios no tienen el mismo grado o no están formados por la misma variable, los monomios se dirán que no son semejantes y por tanto no representan a magnitudes físicas equivalentes, no pudiéndolos agrupar en un solo monomio.

Ejercicio 4

Completa la tabla.

Monomio	Coeficiente	Variable	Grado
$3.axy^2$	3	a,x,y	
$-5.z^3$			
	-4	x	1
$x^3.y^3$		x,y	
5		Cualquiera	

2.1) OPERACIONES CON MONOMIOS

Suma y Resta de Monomios.

Sólo pueden sumarse y restarse, los monomios semejantes.

Procedimiento:

*Para **sumar/restar** dos monomios semejantes, se **suma/resta** los coeficientes y, se deja la misma variable.*

Veamos un ejemplo:

Calcula estas sumas de monomios semejantes:

a) $5x^3+8x^3-2x^3=(5+8-2).x^3=\mathbf{11.x^3}$

b) $\frac{1}{2}y^2+y^2-\frac{5}{6}y^2=(\frac{1}{2}+1-\frac{5}{6}).y^2=\frac{2}{3}\cdot y^2$

Producto de Monomios.

Para multiplicar dos monomios no es necesario que estos sean semejantes.

Procedimiento.:

El producto de monomios, será otro monomio que tendrá como coeficiente el producto de los coeficientes y como exponente de la **misma variable**, la suma de los exponentes, pues será el producto de potencias de la misma base.

Veamos un ejemplo:

Multiplica los siguientes monomios: $(-3x^2) . (7x^3) = (-3x^2) . (7x^3) =(-3.7).(x^2.x^3)=-21.x^5$

Cociente de Monomios.

- *No es necesario que sean semejantes.*
- *El grado del monomio dividendo debe ser mayor o igual al grado del monomio divisor, para no generar fracciones algebraicas.*

Procedimiento:

Al dividir dos monomios obtenemos otro monomio cuyo coeficiente es el cociente de los coeficientes y cuya parte literal es la misma letra elevada a la resta de los exponentes. (Recordar cociente de potencias de la misma base).

Veamos un ejemplo:

Vamos a dividir el monomio $6x^5$ entre el monomio $3x^2$

$$\frac{6x^5}{3x^2} = \frac{6}{3} \cdot \frac{x^5}{x^2} = 2.x^{5-2} = 2.x^3$$

Ejercicio 5

Indica cuales de los siguientes monomios son semejantes.

a) $2x^3$	b) $4x^4$	c) $-6x^2$	d) $\frac{4}{5}x^3$
e) $-2x$	f) $-\frac{1}{2}x^2$	g) $\frac{4}{5}x^3$	h) $-10x^4$

☐	Son semejantes: • b,h • a,d,g • c,f,e
☐	Son semejantes: • b,h • a,d,g • c,f
☐	Son semejantes: • b,h,f • a,d,g • c,f

Ejercicio 6

Realiza las siguientes operaciones con monomios:

a) $2x^3-7x^3+x^3$ =

b) $\frac{4}{3}x^2(-2x) =$

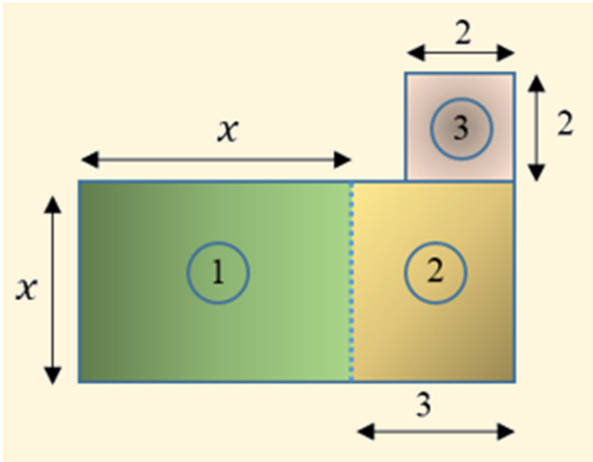
c) $\frac{2}{4x^6} \cdot (x^7) =$

3) POLINOMIOS

Supongamos que deseamos conocer el área (dividida en tres zonas) de una solución habitacional como la de la figura.

Si calculamos el área de la figura tendremos:

$$\text{Área} = \underbrace{x^2}_{1} + \underbrace{3x}_{2} + \underbrace{4}_{3}$$



La expresión anterior representa a un polinomio, por lo que podremos definir un ***polinomio*** *como la* ***suma*** **o resta** de monomios ***no semejantes.***

Al referirnos a un polinomio solemos utilizar la siguiente nomenclatura:

- **Término:** Cada uno de los monomios que integra el polinomio.
- **Variable:** La letra sobre la que construimos el polinomio.
- **Grado:** El mayor de los exponentes de los monomios que integran el polinomio.
- **Termino Independiente:** El monomio que no lleva letra o que la variables está elevada a cero.
- **Polinomio Reducido**: Polinomio obtenido después de agrupar los monomios semejantes.
- **Polinomio Ordenado:** Polinomio en el que se han ordenado sus monomios que lo forman, atendiendo a su grado. La ordenación podrá ser de forma creciente o decreciente. Para operar con polinomios es conveniente que estos estén ordenados.
- ***Polinomio Completo****:* Cuando el polinomio tiene todos los términos intermedios desde el de mayor grado hasta el término independiente.
- **Valor numérico de un polinomio.:** Es el valor que adquiere el polinomio, al sustituir en el la variable por un número y realizar las operaciones indicadas.
- ***Raíz de un polinomio:*** Es el valor de la variable que hace que el valor numérico del polinomio sea cero. ***Un polinomio podrá llegar tener tantas raíces reales como indica su grado.***

Los polinomios suelen denominarse por una ***letra mayúscula, colocando entre paréntesis la variable sobre la que se construye.***

Así nos referimos a ***P(x)*** *=* $3x^4+2x^3+1$.

Sabiendo que x es la variable del polinomio, si existiesen más letras las consideraríamos como coeficientes.

Repasemos **con el siguiente ejemplo la nomenclatura dada sobre polinomios.**

Partamos del siguiente polinomio: $5x^3+6x^2-4x^3-12x^4-6x+9x-3x^4+9-5=$

- **Términos:** El polinomio original está formado por 9 términos.
- **Variable:** El polinomio sólo tiene una variable que la hemos denominado con la letra X.
- **Polinomio Reducido**: Si sumamos los monomios semejantes el polinomio quedaría como: $x^3+6x^2-15x^4+3x+4=$ **donde ha pasado de tener 9 términos a quedarse con 6.**
- **Grado:** El polinomio es de **grado 4**. El mayor de los exponentes de los monomios que integran.
- **Termino Independiente:** El 4 es el término que no depende de x, pues sería el coeficiente del monomio de grado cero. $4.x^0$ y si recordamos cualquier potencia elevada al exponente cero, tiene como valor uno.
- **Polinomio Ordenado:** $-15x^4+x^3+6x^2+3x+4=$
- ***Polinomio Completo:*** Nuestro polinomiio es completo pues tiene todos los monomios desde el grado 4 hasta el grado cero.
- **Valor numérico de un polinomio.:** Llamemos a nuestro polinomio P. Por tanto $P(x)=-15x^4+x^3+6x^2+3x+4$

  Nos interesa saber cuánto vale el polinomio cuando la variable x tome el valor de dos.

  $P(x=2)=-15(2)^4+(2)^3+6(2)^2+3(2)+4=-15(16)+(8)+6(4)+3(2)+4=-240+8+24+6+4=-198$
- ***Raíz de un polinomio:*** Como el polinomio es de grado cuatro y sus coeficientes son números reales, el polinomio podría llegar a tener hasta cuatro raíces que fuesen números reales. Las que faltasen sería raíces de números complejos.

Ejercicio 7

Dada la siguiente expresión algebraica que representa a un polinomio, contesta a las siguientes preguntas:

$$8x^2-5x^3+4x-6x^2+2x-5$$

- **Cuantos términos tiene.**
- **Cuál es la variable sobre el que se construye:**
- **Grado:**
- **Cuál es el Termino Independiente:**
- **Expresa el Polinomio Reducido**:
- **Nombra y escribe el Polinomio Ordenado:**
- ***¿Es un Polinomio Completo?***
- **Valor numérico del Polinomio cuando x=-1.**
- ***¿Hasta cuantas raíces reales podría tener el polinomio?***

3.1) OPERACIONES CON POLINOMIOS

➢ Producto de un Polinomio por un número.

Consistirá en multiplicar los coeficientes del polinomio por el número dado.

Siendo **P(x)= $2x^3 - 5x^2 + 2x - 3$**. Calcular el polinomio -2 **P(x).**

$-2.P(x)=(-2.2).x^3 - (-2.5).x^2 + (-2.2).x - (-2.).3 = -4.x^3 + 10.x^2 - 4.x + 6$

➢ Suma de Polinomios.

*La suma de dos o más polinomios será otro polinomio constituido al **sumar entre sí los monomios semejantes** de los polinomios que se suman.*

Calcular la suma de los polinomios: P(x) + Q(x).

P(x)= $2x^3 - 5x^2 + 2x - 3$.

Q(x)= $7x^2 - 5x^3 - 2x - 4$

Lo primero que haremos es observar si los polinomios están ordenados, si no lo estuviesen los ordenaríamos.

Seguidamente colocamos en columna los monomios semejantes y procedemos a sumar sus coeficientes.

P(x) ⇒	$2x^3$	$-5x^2$	$+2x$	-3
Q(x) ⇒	$-5x^3$	$+7x^2$	$-2x$	-4
P(x) + Q(x) =	$-3x^3$	$+2x^2$		-7

➢ Resta de Polinomios.

*La resta de dos polinomios será otro polinomio, obtenido al sumarle al minuendo el **opuesto del sustraendo**.*

Calcula W(y)-R(y) siendo

W(y)= $5y^3 - 6y^2 + 2y - 3$.

R(y)= $8y^3 - 10y^2 + 10y - 4$.

Primero comprobaremos que los polinomios estén ordenados, si no fuese así los ordenaríamos y reduciríamos si fuese el caso.

La operación que vamos a realizar podemos expresarla como: *W(y)-R(y)=W(y)+(-1).R(y). Colocaremos los monomios semejantes en la misma columna para proceder a su suma.*

W(y)⇒	$5y^3$	$-6y^2$	$+2y$	-3
$-R(y)$⇒	$-8y^3$	$+10y^2$	$-10y$	+4
W(y)+(-R(y))=	$-3y^3$	$+4y^2$	$-8y$	1

➢ Producto de un Monomio por un Polinomio.

Procedimiento:

Se procede multiplicando el monomio por cada uno de los términos del polinomio. Luego nos encontramos ante multiplicaciones parciales de monomios.

Vamos a calcular el producto del monomio **($-3x^2$)** por le polinomio **P(x)=($2x^2 + 5x -6$)**

Podemos hacer la multiplicación en línea:

($-3x^2$) . P(x)= ($-3x^2$). ($2x^2$)+($-3x^2$)(5x) - ($-3x^2$).(6)=$-6x^4-15x^3+18x^2$

➢ Producto de dos Polinomio.

El resultado será otro polinomio, obtenido al multiplicar todos los términos de uno de los polinomios, por todos los términos del otro y reducir los términos semejantes.

*Calcula el siguiente producto de polinomios: ($2x^2$-3x-5).**(5x-9)** =*

	$2x^2$	$-3x$	-5
		$5x$	-9
$10x^3$	$-15x^2$	-25x	
	$-18x^2$	27x	45
$10x^3$	$-33x^2$	2x	45

Particular importancia tienen una serie de multiplicaciones que agruparemos bajo el epígrafe de productos Notables.

➢ División de un Polinomio por un monomio.

Se divide cada término del polinomio entre el monomio, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Veamos un ejemplo:

Efectúa: $\dfrac{2x^4 - 5x^3 + x^2}{-x^2}$

$$\frac{2x^4 - 5x^3 + x^2}{-x^2} = \frac{2x^4}{-x^2} - \frac{5x^3}{-x^2} + \frac{x^2}{-x^2} = -2x^{4-2} + 5x^{3-2} - x^{2-2} = -2x^{4-2} + 5x^{3-2} - x^{2-2}$$
$$= -2x^2 + 5x^1 - x^0 = \boldsymbol{-2x^2 + 5x - 1}$$

Veamos otro ejemplo:

Realiza la siguiente división:

$$\frac{4x^3 + 2x^2 - 5}{-x^2}$$

$$\frac{4x^3 + 2x^2 - 5}{-x^2} = \frac{4x^3}{-x^2} + \frac{2x^2}{-x^2} - \frac{5}{-x^2} = -4x^{3-2} - 2x^{2-2} + \frac{5}{x^2} = -2x^1 - 2x^0 + \frac{5}{x^2} = -2x - 1 + \frac{5}{x^2}$$

Sin realizar la división Q(x)/P(x) contesta estas preguntas:

a) ¿De qué grado es el polinomio dividendo?
b) ¿De qué grado es el polinomio divisor?
c) ¿De qué grado será el polinomio cociente?

Ejercicio 9

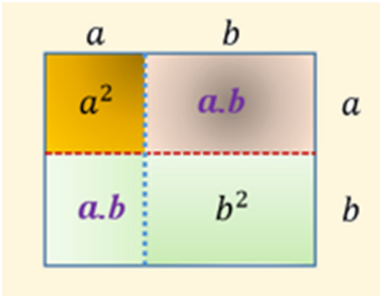
Siendo: $Q(x) = (3x^3 - 2x^2 - 4x - 8)$

$P(x) = (x - 2)$

Realiza la siguiente división Q(x)/ P(x) e indica si la división es exacta o inexacta.

3.2) PRODUCTOS NOTABLES

Son un grupo de identidades algebraicas que aparecen muy frecuentemente en el cálculo.



El cuadrado de una suma. $(a+b)^2 = a^2 + 2a.b + b^2$

(El cuadrado de primer término, más el doble producto de primero por el segundo término más el cuadrado del segundo término).

A esta expresión se le denomina cuadrado perfecto.

Demostración.

La expresión $(a + b)^2$ es equivalente a $(a + b).(a + b)$, entonces al realizar el producto de los binomios, se obtiene:

$$(a + b)^2 = (a + b).(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ejemplo. Desarrolla $(x + 7)^2$.

Al aplicar la regla general:

- El cuadrado del primer término: $(x)^2 = x^2$
- El doble producto del primer término por el segundo: $2(x)(7) = 14x$
- El cuadrado del segundo término: $(7)^2 = 49$

Se suman los términos resultantes y se obtiene: $(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$

Otro ejemplo. Desarrolla $(-2x - 3y)^2=$

Al aplicar la regla general:

- El cuadrado del primer término: $(-2x)^2 = 4x^2$
- El doble producto del primer término por el segundo: $2(-2x)(-3y) = 12xy$
- El cuadrado del segundo término: $(-3y)^2 = 9y^2$

Se suman los términos resultantes y se obtiene: $(x + 7)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

• ***El cuadrado de una diferencia.*** ***$(a-b)^2 = a^2 - 2\,a.b + b^2$***

(El cuadrado de primer término, menos el doble producto del primero por el segundo término más el cuadrado del segundo término).

Demostración.

La expresión $(a - b)^2$ es equivalente a $(a- b).(a - b)$, entonces al realizar el producto de los binomios, se obtiene:

$$(a - b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo. ¿Cuál es el resultado de desarrollar $(4x^4 – 9y^3)^2$?

Se aplica la fórmula anterior y se obtiene:

$(4x^4 – 9y^3)^2 = (4x^4)^2 – 2(4x^4)(9y^3) + (9y^3)^2= 16x^8 – 72x^4y^3 + 81y^6$

• ***Suma por Diferencia. Binomios conjugados.*** **$(a + b).(a-b) = a^2 – b^2$**

(El cuadrado de primer término menos el cuadrado del segundo término).

Demostración.

Al realizar el producto a $(a+b).(a - b)$, los dobles productos se anulan quedando los cuadrados de los términos.

$$(a+b).(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Ejemplo. Resuelve $(– 2x^3 + 7)\ (– 2x^3 – 7)$.

Ambos términos se elevan al cuadrado:

El cuadrado del término que no cambia de signo: $(– 2x^3)^2 = 4x^6$

El cuadrado del término que cambia de signo: $(7)^2 = 49$

Finalmente, se realiza la diferencia y el resultado es: $4x^6– 49$

• ***Trinomio de una suma*** ***.$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2a.b + 2ac + 2bc$***

(El cuadrado del primer término más el cuadrado del segundo término más el cuadrado del tercer término. Más el doble producto del primer término por el segundo y tercer término. Mas el doble producto del segundo término por el tercero).

Demostración.

La expresión $(a + b + c)^2$ es equivalente al producto $(a + b + c)\ (a + b + c)$, entonces:

$(a + b + c)^2 = (a + b + c).(a + b + c) = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2$

Al simplificar los términos semejantes: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Ejemplo. Desarrolla $(x + 2y + 3z)^2$.

Se aplica la fórmula y se obtiene como resultado:

$(x + 2y + 3z)^2 = (x)^2 + (2y)^2 + (3z)^2 + 2(x)\ (2y) + 2(x)\ (3z) + 2(2y)\ (3z)$

$= x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz + 12yz$

5) AUTOEVALUACIÓN

Ejercicio 21

¿Cómo expresaría algebraicamente el siguiente enunciado?:

La suma de tres números enteros pares consecutivos.

	6n+3=
	n+(n+1)+(n+2)=
	2n+(n+1)+(n+2)=

Ejercicio 22

Indica cual es el grado del siguiente monomio: -25 ⇒ -5^2

	El monomio es de grado 2
	El monomio no tiene grado
	El monomio es de grado cero

Ejercicio 23

El producto de los siguientes monomios $(4\ a\ x^4\ y^3) \cdot (x^2\ y) \cdot (3\ a\ b^2\ y^3)$ es:

	$12\ ab^2x^6y^3$
	$12\ a^2\ b^2\ x^4\ y^7$
	$12\ (a\ b)^2\ x^6\ y^7$

Ejercicio 24

¿Cuál de las siguientes expresiones representa a un polinomio?

	$\frac{X^2+6X-1}{2}$
	$\frac{X^2+6X-1}{2.x}$
	Las dos respuestas anteriores son correctas.

Ejercicio 25

Dados los polinomios indicados, el valor de la siguiente ecuación polinómica R(x)+Q(x)-2.P(x)= será:

P(x)=x4+2x2+1

Q(x)=2x4+2x3+2

R(x)=-2x3+4x2

	$S(x)= 2x^3+x^2+4$
	S(x)= 0
	Ninguna de las respuestas anteriores es correcta

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1

Lenguaje Semántico	Lenguaje Algebraico
Un número cualquiera	x
Un número cualquiera aumentado en siete.	x+7
La diferencia de dos números cualesquiera.	f-g
El doble de un número excedido en cinco.	2x+5
La división de un número entero entre su precedente.	(x+1)/x
La mitad de un número.	x/2
El cuadrado de un número.	y2
Las dos terceras partes de un número disminuido en cinco es igual a 12.	(2x/3)-5=12
Tres números naturales consecutivos.	x, x +1, x +2
El cuadrado de un número aumentado en siete.	x2 + 7
Las tres quintas partes de un número más la mitad de su consecutivo equivalen a 3.	[(3x/5)+(x+1)/2]=3
El producto de un número positivo con su antecesor equivale a 30.	x.(x –1) = 30
El cubo de un número más el triple del cuadrado de dicho número.	x3 + 3x2
Lo que excede 1500 del valor de X	1500-x

Ejercicio 2

Determina el valor numérico de la expresión: $x^4.y^2.z^3$; siendo x = 4, y = 3, z =1/2.

Se sustituyen los respectivos valores de x, y, z y se efectúan las operaciones indicadas para obtener el valor numérico de la expresión:

$$x^4.y^2.z^3 = 4^4.3^2.\left(\frac{1}{2}\right)^3 = (256).(9).\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{2304}{8} = 288$$

Ejercicio 3

Cuál es el valor numérico de la expresión algebraica:

$$\frac{5x^2}{3}-\frac{2.x.y}{5}+\frac{y}{3x}=$$

Siendo el valor de las variables: x=2; y=1/4

Se sustituyen los respectivos valores de x, y, z se efectúan las operaciones indicadas para obtener el valor numérico de la expresión:

$$\frac{5x^2}{3}-\frac{2.x.y}{5}+\frac{y}{3x}=\frac{5(2)^2}{3}-\frac{2.(2).\left(\frac{1}{4}\right)}{5}+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{3(2)}=\frac{20}{3}-\frac{\frac{4}{4}}{5}+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{6}=\frac{20}{3}-\frac{1}{5}+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{6}=\frac{20}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{24}$$

Convertimos las fracciones en otras equivalentes con el mismo denominador, podemos elegir como tal al mcm(3,5,24)=120.

$$\frac{20}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{24}=\frac{800}{120}-\frac{24}{120}+\frac{5}{120}=\frac{781}{120}$$

Por tanto, el valor numérico de la expresión es igual a: 781/120

Ejercicio 4

Completa la tabla.

Monomio	Coeficiente	Variable	Grado
$3.axy^2$	**3**	**a,x,y**	4
$-5.z^3$	-5	z	3
-4x	**-4**	**x**	**1**
$x^3.y^3$	1	**x,y**	6
5	5	**Cualquiera**	0

Ejercicio 5

Indica cuales de los siguientes monomios son semejantes.

a) $2x^3$	b) $4x^4$	c) $-6x^2$	d) $\frac{4}{5}x^3$
e) $-2x$	f) $-\frac{1}{2}x^2$	g) $\frac{4}{5}x^3$	h) $-10x^4$

☐	Son semejantes: • b,h • a,d,g • c,f,e
X	Son semejantes: • b,h • a,d,g • c,f
☐	Son semejantes: • b,h,f • a,d,g • c,f

Ejercicio 6

Realiza las siguientes operaciones con monomios:

a) **$2x^3$-$7x^3$+x^3** = $2x^3-7x^3+x^3= 2x^3-7x^3+x^3 = -4x^3$

b) $\frac{4}{3}x^2(-2x)=$ $\frac{4}{3}\cdot(x^2).(-2x)=-\frac{8}{3}x^3$

c) $\frac{2}{4x^6}\cdot(x^7)=$ $\frac{2}{4x^6}\cdot(x^7)=\frac{1}{2}x$

Ejercicio 7

Dada la siguiente expresión algebraica que representa a un polinomio, contesta a las siguientes preguntas:

$8x^2-5x^3+4x-6x^2+2x-5$

- **Cuantos términos tiene.**
- **Cuál es la variable sobre el que se construye:**
- **Grado:**
- **Cuál es el Termino Independiente:**
- **Expresa el Polinomio Reducido**:
- **Nombra y escribe el Polinomio Ordenado:**
- ***¿Es un Polinomio Completo?***
- **Valor numérico del Polinomio cuando x=-1.**

- **Cuantos términos tiene.** Tiene seis monomios, luego seis términos.
- **Cuál es la variable sobre el que se construye:** El polinomio solo tiene una variable, que le hemos denominado x

- **Grado:**

El grado del polinomio es 3, por ser este el grado del mayor de los monomios que lo forman.

- **Cuál es el Termino Independiente:**

El término independiente es el 5, aquél monomio que no está explicita la variable, por estar esta elevada al exponente cero, (x^0)

- **Expresa el Polinomio Reducido:**

Al agrupar los monomios semejantes la expresión algebraica quedaría como:

$2x^2-5x^3+6x-5$

- **Nombra y escribe el Polinomio Ordenado:**

Podemos ponerle el nombre de Q y entonces diríamos: $Q(x)=-5x^3+2x^2+6x-5$ =

- ***¿Es un Polinomio Completo?***

Si porque tiene todos los grados desde el mayor 3 hasta el menor 0

- ***Valor numérico del Polinomio cuando x=-1.***

Sustituyendo la variable y realizando las operaciones indicadas obtendríamos que:

$Q(x=-1)=-5x^3+2x^2+6x-5 = =-5(-1)^3+2(-1)^2+6(-1)-5 =-14$